

Esempi

$$1) \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 = -2$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 = 4$$

Polinomio caratteristico di una matrice

Matrice 2×2

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice 2×2

Si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO di A il polinomio (nella variabile λ)

$$p_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

dove $\text{tr}(A) = a+d$ è la traccia di A

Matrice 3×3

$$\text{Sia } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ una matrice } 3 \times 3$$

Si chiama POLINOMIO CARATTERISTICO di A il polinomio

$$p_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$

Definizione Sia A una matrice quadrata

le radici del polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ si chiamano AUTOUVALORI

Esempio $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1 \quad \text{il polinomio caratteristico di } A$$

$$\text{le radici di } p_A(\lambda) \text{ sono date da } \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{2} \text{ autovalori di } A$$

Teorema di Sylvester (versione semplificata)

Sia A una matrice $m \times m$ simmetrica

Il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ ammette m -radici reali contate con le rispettive molteplicità

Teorema

Sia A una matrice simmetrica $n \times n$

- se tutti gli autovalori di A sono positivi allora A è definita positiva
- se tutti gli autovalori di A sono negativi allora A è definita negativa
- se tutti gli autovalori di A sono non negativi allora A è semidefinita positiva
- se tutti gli autovalori di A sono non positivi allora A è semidefinita negativa
- se esistono due autovalori di A di segno opposto allora A è indefinita

Funzioni di più variabili reali

Siano $m, n \in \mathbb{N}^*$, consideriamo una funzione $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

a) Se $m=1$ $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ è una **FUNZIONE REALE** di m -variabili reali
(**FUNZIONE SCALARE** di m -variabili reali)

NB: Se $m=n=1$ ritroviamo le funzioni reali di variabili reali
che abbiamo studiato durante questo corso

b) se $m \geq 2$ $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una **FUNZIONE VETTORIALE** di m -variabili reali

c) se $m=n \geq 2$ $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ è un **CAMPO VETTORIALE**

Notazioni

1) Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo scrivere

- $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$
- $(x_1, \dots, x_m) \in X \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto f(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$

2) Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m \geq 2$ possiamo usare diverse notazioni:

- $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^n$
- $x \in X \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n$

le funzioni $f_1, \dots, f_n: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ si chiamano **COMPONENTI** della
funzione vettoriale f e si scrive **$f = (f_1, \dots, f_n)$**

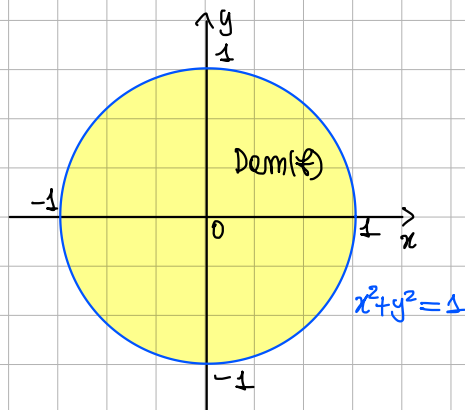
- $(x_1, \dots, x_m) \in X \subseteq \mathbb{R}^m \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^n$

Esempi

1) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$X = \text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 \geq 0\} \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



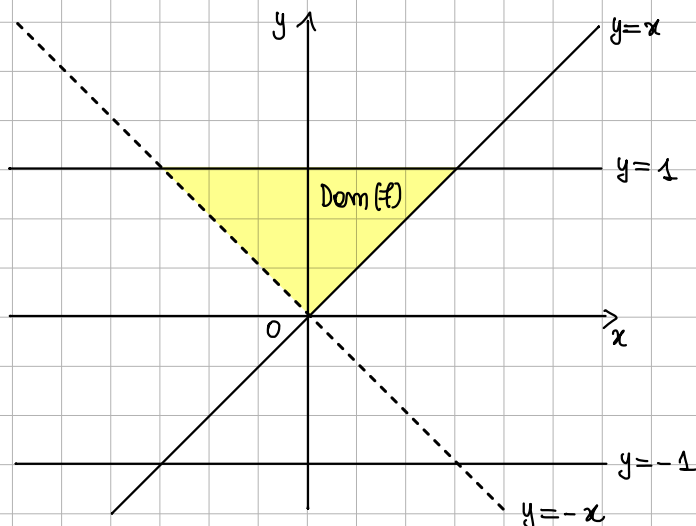
$$2) f(x,y) = (\ln(x+y), \sqrt{y-x}, \arcsin y + e^x)$$

$$f: X \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

funzione vettoriale di 2 variabili reali

$$X = \text{dom}(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0, y-x \geq 0, y \in [-1,1] \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x, y \geq x, -1 \leq y \leq 1 \}$$



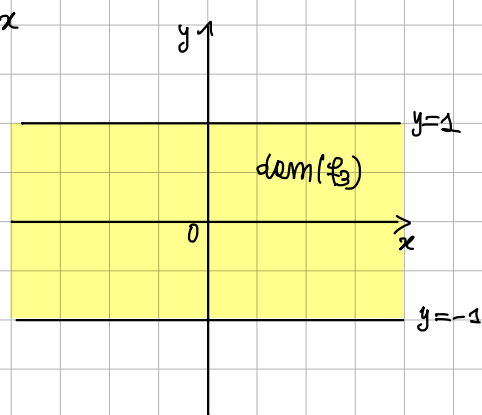
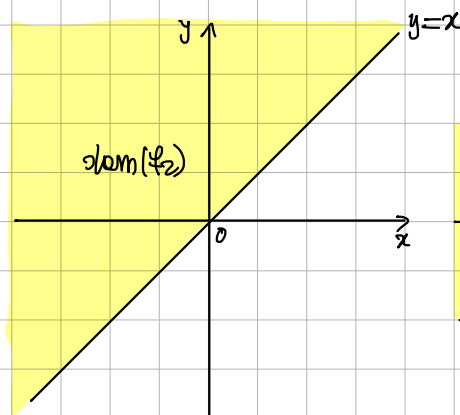
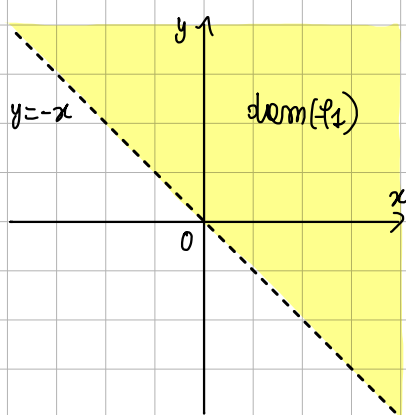
Osserviamo che le componenti di f sono

$$f_1(x,y) = \ln(x+y)$$

$$f_2(x,y) = \sqrt{y-x}$$

$$f_3(x,y) = \arcsin y + e^x$$

$$f = (f_1, f_2, f_3)$$



Definizione Sia $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione scalare di m -variabili reali

Il **GRAFICO** di f è l'insieme

$$G_f \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in X \}$$

$$= \{ (x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1} : (x_1, \dots, x_m) \in X \}$$

• Se $m=1$ G_f è una "curva" in $\mathbb{R}^2$

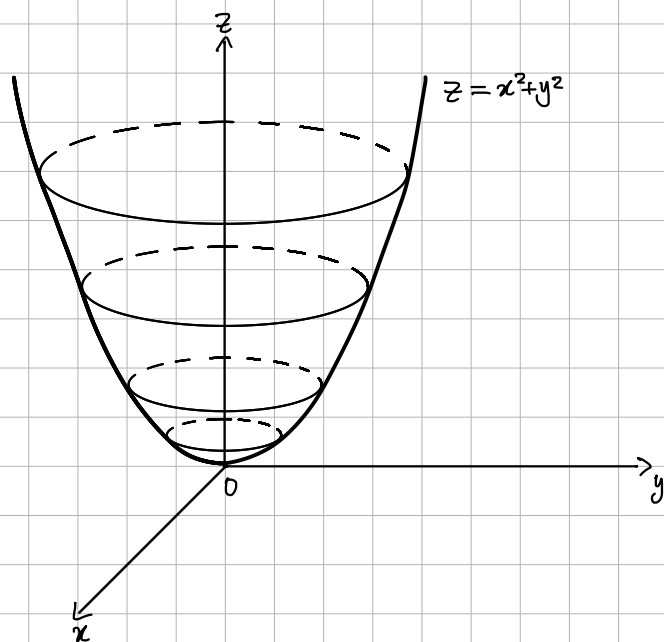
• Se $m=2$ G_f è una "superficie" in $\mathbb{R}^3$

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Il grafico della funzione f è l'insieme dei punti

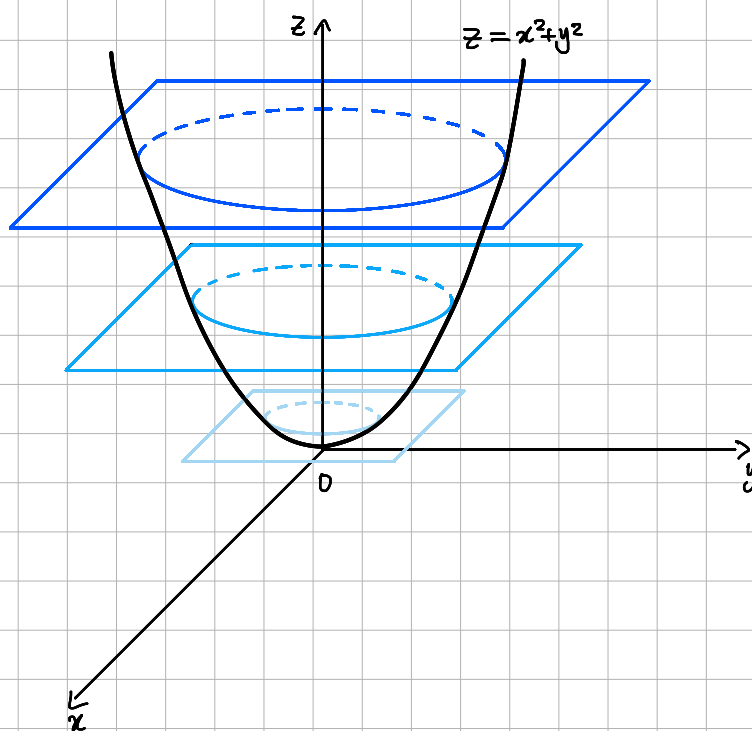
$$\{(x,y,x^2+y^2) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}$$

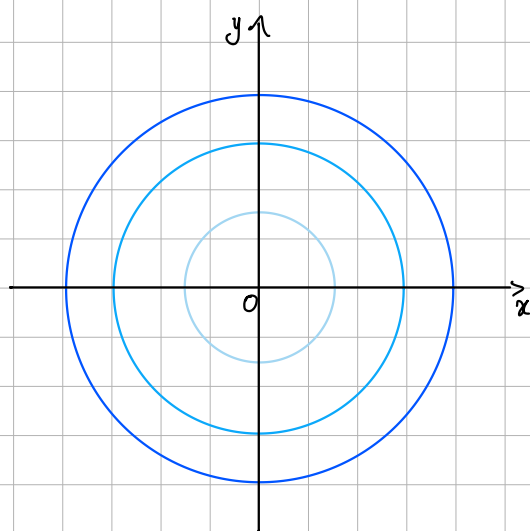
In geometria questa superficie è una quadrica e si chiama PARABOLOIDE CIRCOLARE



Le funzioni reali di due variabili reali si possono rappresentare anche mediante le **CURVE di LIVELLO**, ovvero curve nel piano xy su cui la funzione considerata è costante. Tali curve si ottengono proiettando sul piano xy le intersezioni dei piani paralleli al piano xy (cioè i piani di equazione $z=c$ con c costante reale) con il grafico di f .

Nell'esempio precedente le curve di livello sono circonferenze concentriche centrate nell'origine





Diversamente da quanto abbiamo visto nel caso di funzioni reali di una singola variabile reale, nel caso di funzioni scalari di più variabili reali non siamo interessati a disegnare i grafici di queste funzioni. Già nell'esempio precedente abbiamo visto che non è semplice disegnare la superficie individuata dal grafico nello spazio tridimensionale per una funzione scalare di due variabili reali (una funzione molto semplice, visto che $f(x,y) = x^2 + y^2$ è un polinomio di II grado). Inoltre per $m \geq 3$ non possiamo disegnare il grafico in uno spazio $(m+1)$ -dimensionale visto che $m+1 \geq 4$. Per $m=3$ potremmo molto difficilmente disegnare le SUPERFICI di LIVELLO nello spazio tridimensionale (evidentemente solo per funzioni molto semplici).

Quindi, che cosa è interessante studiare per le funzioni scalari di più variabili reali? Molte nozioni che abbiamo introdotto per le funzioni di una singola variabile reale possono estendersi in maniera "naturale" a funzioni scalari di più variabili reali (ad esempio le nozioni di limiti, continuità, limitatezza, punti di massimo e minimo relativi/assoluti, convessità/concavità) e molto di conoscere la geometria di $\mathbb{R}^m$.

Le nozioni di derivabilità sono invece rimpiazzate per funzioni di più variabili reali da una nozione più forte (la DIFFERENZIABILITÀ).

Come vedremo nel seguito, per $m=1$ derivabilità e differenziabilità sono due concetti equivalenti, per $m \geq 2$ vedremo invece che

$$f \text{ differenziabile} \Rightarrow f \text{ derivabile} \\ \nLeftarrow$$

Utilizzando queste nozioni di differenziabilità e il calcolo matriciale, potremo studiare i punti di massimo e minimo relativi per $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.

Abbiamo già introdotto le proprietà ALGEBRICHE di $\mathbb{R}^m$ (che abbiamo visto essere uno spazio vettoriale euclideo), prima di parlare di limiti, continuità, derivabilità e differenziabilità per funzioni $f: X \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dobbiamo introdurre alcune proprietà METRICHE e TOPOLOGICHE di $\mathbb{R}^m$.

DISTANZA (o METRICA) in $\mathbb{R}^m$

Se $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ e $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ si chiama DISTANZA tra i due punti x e y il numero reale

$$d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^m (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

Esempi

- Per $m=1$ $d(x, y) = |x - y|$
- Per $m=2$ $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$
- Per $m=3$ $d((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$

Definizioni

Siano $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $r > 0$

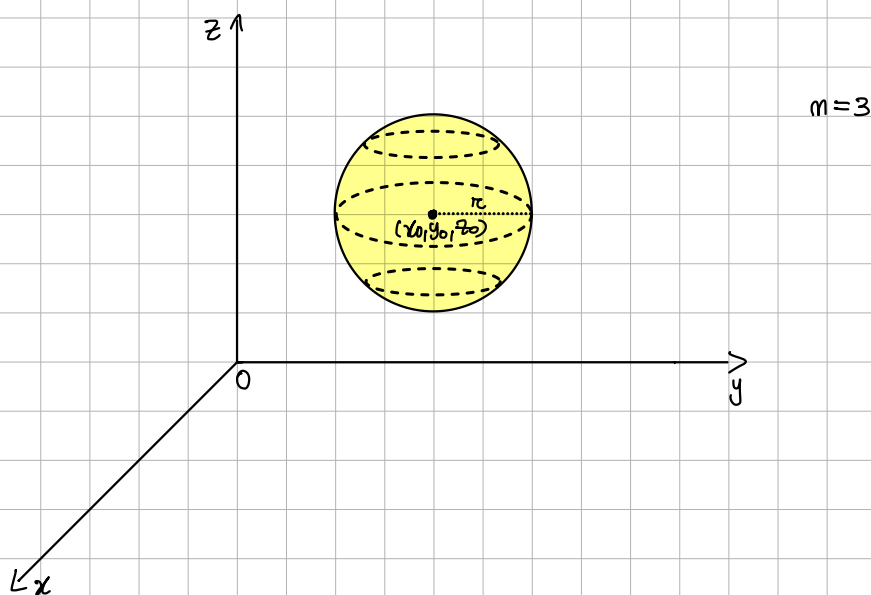
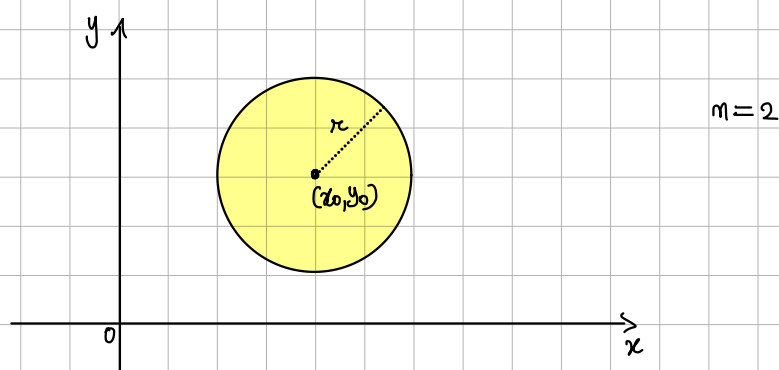
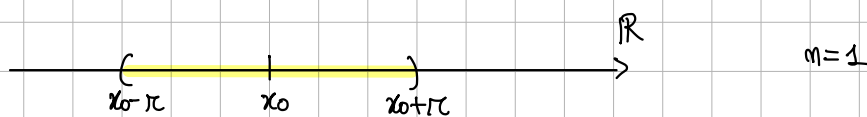
l'insieme $B_r(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| < r\}$

si chiama INTORNO SFERICO di centro x_0 e raggio r

oppure PALLA APERTA di centro x_0 e raggio r

Esempi

- Per $m=1$ $B_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$ intervallo aperto di estremi $x_0 \pm r$
- Per $m=2$ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$
- Per $m=3$ $B_r(x_0, y_0, z_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$

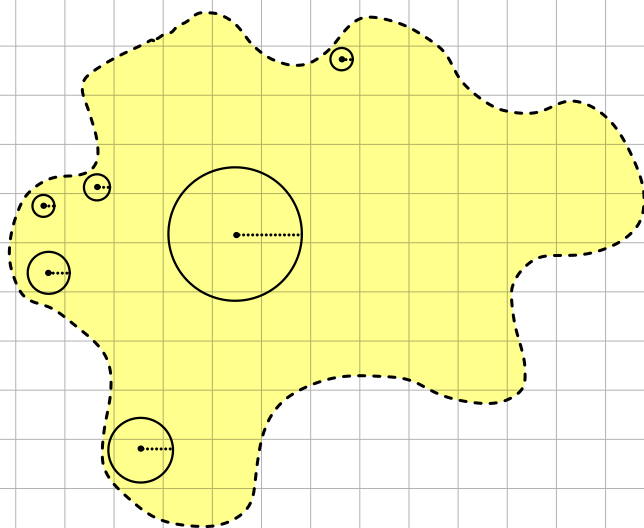


PROPRIETÀ TOPOLOGICHE di $\mathbb{R}^n$ (e dei suoi sottoinsiemi)

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che A è un insieme **APERTO** se
 $\forall x \in A \quad \exists r = r(x) > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$

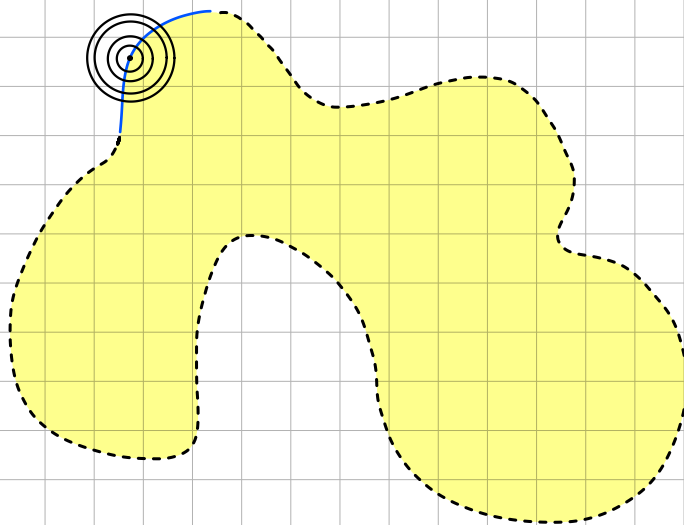
Esempi

1)



insieme aperto

2)



insieme non aperto (i punti in blu appartengono all'insieme e sono quelli che danno problemi, perché non importa quanto scegliamo piccolo il raggio, la palla centrata in uno di quei punti non sarà mai contenuta interamente nell'insieme)

3) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0$ la palla $B_r(x_0)$ è un insieme aperto

Definizione Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che C è un insieme **CHIUSO** se
 $\mathbb{R}^n \setminus C = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin C\}$ è insieme aperto

Esempio $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0$ $\overline{B_r(x_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ è un insieme chiuso
che si chiama **PALLA CHIUSA** di centro x_0 e raggio r

Definizione Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che $x_0 \in V$

Diciamo che V è un **INTERNO** di x_0 se $\exists A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto tale che $x_0 \in A \subseteq V$

Definizioni Siano $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$

1) Diciamo che x_0 è un **PUNTO INTERNO** di X e scriviamo $x_0 \in \text{Int}(X)$

se X è un intorno di x_0 , ovvero $\exists A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto tale che $x_0 \in A \subseteq X$

L'insieme $\text{Int}(X)$ si chiama **INTERNO** di X

2) Diciamo che x_0 è un **PUNTO ESTERNO** di X e scriviamo $x_0 \in \text{Ext}(X)$

se x_0 è un punto interno di $\mathbb{R}^n \setminus X$, ovvero $\exists A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme aperto tale che $x_0 \in A$ e $A \cap X = \emptyset$. L'insieme $\text{Ext}(X)$ si chiama **ESTERNO** di X

3) Diciamo che x_0 è un **PUNTO di ACCUMULAZIONE** di X e scriviamo $x_0 \in \text{Der}(X)$ se

$\forall V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0 : $V \cap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset \iff$

$\forall V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0 : V contiene punti di X diversi da x_0

L'insieme $\text{Der}(X)$ si chiama **DERIVATO** di X

4) Diciamo che x_0 è un **PUNTO ISOLATO** di X se $x_0 \in X$ e x_0 non è un punto di accumulazione, cioè $\exists V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0 tale che $V \cap X = \{x_0\}$

5) L'insieme $X \cup \text{Der}(X)$ si chiama **CHIUSURA** di X e si denota $\bar{X}$

6) L'insieme $\bar{X} \cap (\mathbb{R}^n \setminus X)$ si chiama **FRONTIERA** oppure **BORDO** di X e si denota ∂X

Proposizione Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

- $\text{Int}(X) \subseteq X$
- $\text{Int}(X)$ è uguale all'unione di tutti gli insiemi aperti contenuti in X
- $\text{Int}(X)$ è il più grande insieme aperto (per inclusione) contenuto in X
- X è aperto $\iff X = \text{Int}(X) \iff X \cap \partial X = \emptyset$
- $\text{Ext}(X) = \text{Int}(\mathbb{R}^n \setminus X)$

Proposizione Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$

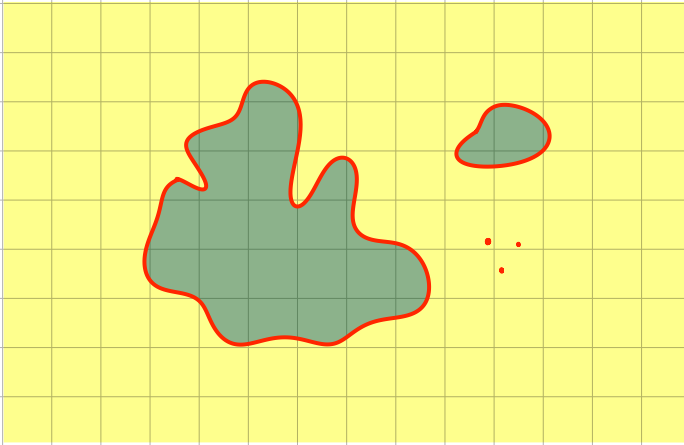
- $\partial X = \mathbb{R}^n \setminus (\text{Int}(X) \cup \text{Ext}(X))$
ovvero x_0 è un punto del bordo di X ($x_0 \in \partial X$) se
 $\forall V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno di x_0 : V contiene punti sia di X che di $\mathbb{R}^n \setminus X$
- $\bar{X} = X \cup \partial X$, quindi $X \subseteq \bar{X}$
- $\bar{X}$ è uguale all'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti X
- $\bar{X}$ è il più piccolo insieme chiuso (per inclusione) contenente X
- X è chiuso $\iff X = \bar{X} \iff \partial X \subseteq X$

Osservazioni

- Esistono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che non sono né aperti né chiusi
Se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ non è né aperto né chiuso valeano le seguenti inclusioni strette
 $\text{Int}(X) \subset X \subset \bar{X}$
ovvero in termini del bordo $\partial X \cap X \neq \emptyset$ e $\partial X \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \emptyset$
- Gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sia aperti che chiusi sono $\emptyset, \mathbb{R}^n$

Esempio

1)



$\text{Int}(X)$ è la parte azzurra

$\text{Ext}(X)$ è la parte gialla

∂X è la parte rossa

i tre puntini in rosso sono i punti isolati

$\text{Dc}(X)$ è $\text{Int}(X) \cup \partial X$ privato dei tre puntini rossi

$\bar{X}$ è l'unione della parte azzurra e di quella rossa

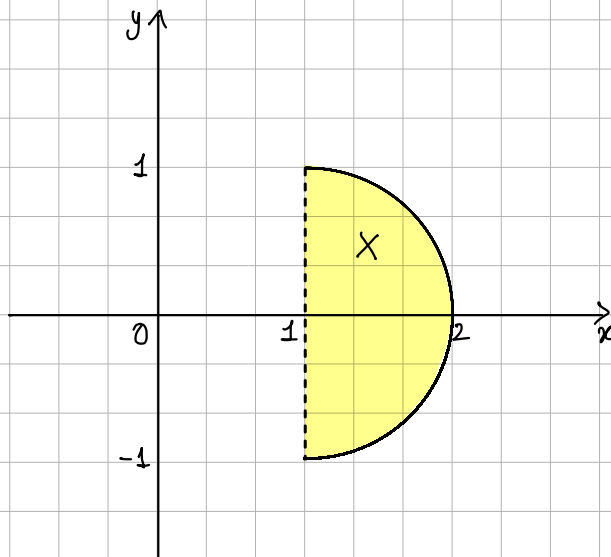
2)

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1, x > 1 \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \} \cap \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \}$$

cerchio chiuso di centro
(1,0) e raggio 1

semipiano aperto



$$\text{Int}(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 < 1 \wedge x > 1 \}$$

$$\text{Ext}(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 > 1 \vee x < 1 \}$$

$$\partial X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : [(x-1)^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 1] \vee [x = 1 \wedge -1 \leq y \leq 1] \}$$

$$\bar{X} = \text{Dc}(X) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \geq 1 \}$$

↑
non ci sono punti isolati